

Eins, zwei, drei, viele



Entwicklung von
Zählkompetenz
und das Problem
Dyskalkulie

■ Das Verständnis von und für Zahlen ist eine Grundvoraussetzung für die kindliche Entwicklung.

Von Wolfgang Mack

Zählen ist für die meisten Menschen eine so alltägliche Fertigkeit, dass sie von nur wenigen als mathematische Fähigkeit gewertet wird. Mathematik beginnt für viele mit den ersten Kopfrechnen-Übungen in der Grundschule. Für umfangreichere Rechenaufgaben stehen dann später Taschenrechner zur Verfügung – zum Glück, denn nur wenige Menschen sind nach Abschluss der Schule noch in der Lage, kompliziertere Rechenaufgaben mit Papier und Bleistift zu lösen. Höhere Mathematik ist weitgehend »zahlenfrei«: Sie operiert mit Gleichungen oder Buchstaben, führt Beweise und denkt in abstrakten Strukturen. Welche Bedeutung das Verständnis von Zahlen für die Entwicklung mathematischer Kompetenzen hat, wird dabei häufig übersehen ■.

Wodurch ist die Zählkompetenz ausgezeichnet?

Unsere Zählkompetenz beruht darauf, dass sowohl unsere Umgebung als auch unser Körper quantitativ strukturiert sind. Unsere Wahrnehmungssysteme ermöglichen es, zwischen Gegenständen und Ereignissen zu unterscheiden und diese darüber hinaus auch zu gruppieren. Ein Blick aus dem Fenster zeigt, dass mehrere Autos auf dem Parkplatz stehen. Dabei bilden die Autos die eine Gruppe und die dahinter stehende Baumreihe eine andere. Bildet der Beobachter die Menge aller von ihm visuell zu unterscheidenden Gegenstände, gehören Autos und Bäume zu einer gemeinsamen Gruppe; diese Art der Mengenbildung ist demnach eine Frage des Standpunkts. Zählen setzt also voraus, dass unser Wahrnehmungssystem Einheiten und Gruppen bilden kann; nur so ist es möglich, Informationen über die Unterschiedlichkeit und Vielfältigkeit unserer Umgebung zu erhalten. Die Anzahl ist folglich ebenso eine Wahrnehmungsdimension wie Länge, Gewicht, Helligkeit oder Lärm.

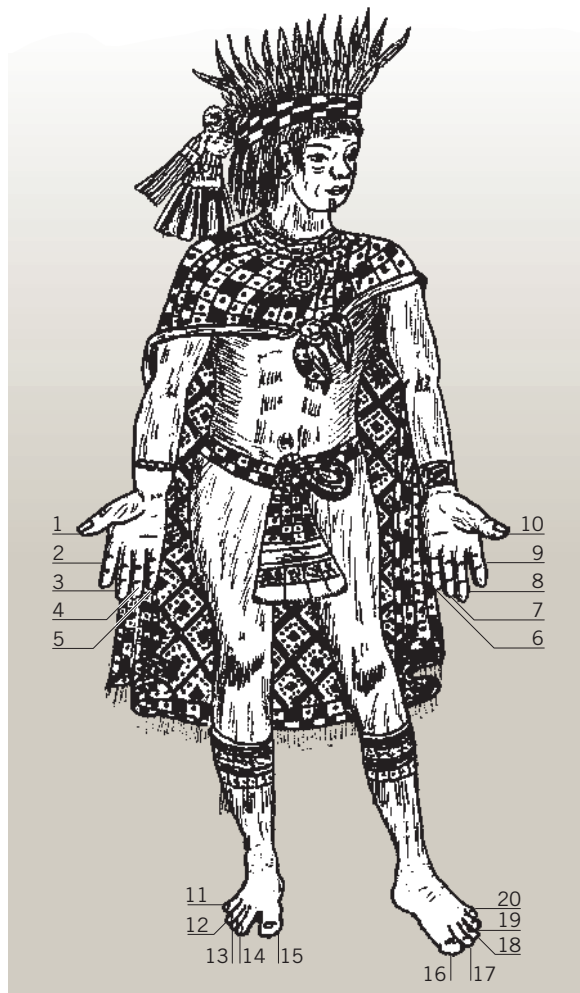
Eins – zwei – drei – ganz viele

Zum quantitativen Erfassen unserer Umgebung fixieren wir Gegenstände mit den Augen zwar nacheinander, können aber bereits mit einem Blick mehrere auf einmal sehen **2**. Dieses »Subitizing« genannte Phänomen, der so genannte »Blitzblick«, ist in der visuellen Wahrnehmung recht gut erforscht. So kann ein Mensch mit einem Blick etwa vier Gegenstände erfassen, ein Befund, den wir in einer Studie sowohl bei jungen als auch bei älteren Erwachsenen bestätigen konnten ^{11/}. Diese wissenschaftliche Erkenntnis ist im Volksmund schon lange bekannt; so unterstreicht die Redewendung »eins – zwei – drei – viele« die Besonderheit kleiner Anzahlen. Aber nicht nur unsere Augen bewegen sich seriell an Gegenständen entlang; auch beim Gehen machen wir einen Schritt nach dem anderen. Mit den Händen können wir darüber hinaus Objekte sortieren und Kollektionen von Gegenständen aller Art herstellen. Die Fähigkeit zur Vereinzelung und Gruppierung von Elementen – Objekten oder Ereignissen – ist somit eine elementare Voraussetzung des Zählens.

Zwei und zwei macht vier

Die Bildung definierter Mengen setzt klassifizierendes Handeln oder Denken voraus. Dazu hilft uns die quantitative Struktur unseres Körpers. So benutzen viele Menschen die Finger, um zu prüfen, ob die Anzahl der Objekte der ihrer Finger entspricht (»Fingerzahlen«, »Körperzahlen«) **3**. Auch Striche helfen, um den Überblick zu behalten, zum Beispiel beim Abzählen von Abstimmungsergebnissen. Diese Marken müssen eindeutig unterscheidbar sein und dürfen nur einem Objekt oder einem Ereignis zugeordnet werden. Sie haben wie die »Fingerzahlen« den Status einer Hilfsmenge, denn die

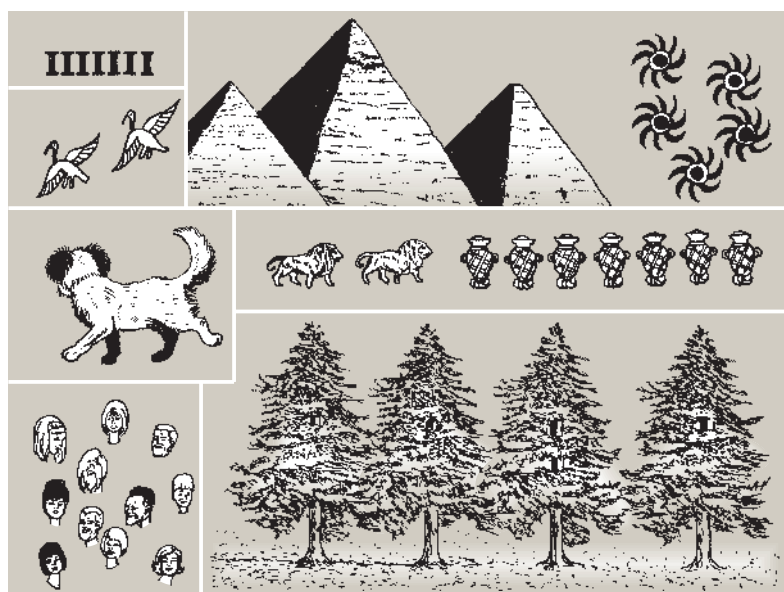
2 Eins, zwei oder drei Elemente können wir mit einem Blick erfassen. Mengen, die größer sind, müssen wir in der Regel zählen, durch Vergleich erfassen oder gedanklich in Teilmengen aufteilen.



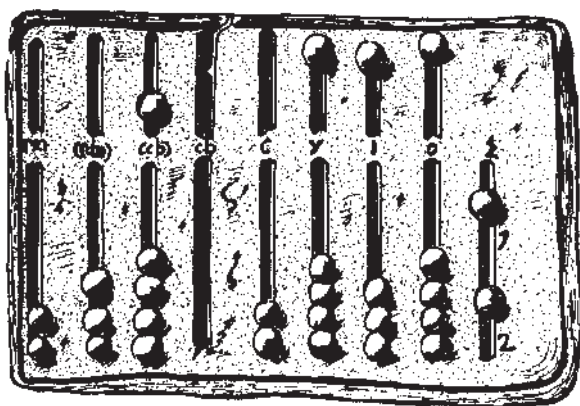
3 Für das Zählen von eins bis zwanzig reichen Finger und Zehen.

zu erfassende Menge wird mit ihrer Hilfe reproduziert. Mit einer solchen Hilfsmenge ist es allerdings nur möglich, einen relativen Anzahlvergleich durchzuführen; das heißt, sie hilft zu beurteilen, ob die Hilfsmenge mit der Objektmenge zahlenmäßig übereinstimmt **4**.

Wie viele Objekte tatsächlich da sind, ist damit noch lange nicht klar. Erst wenn ein Mensch über die Fähig-



4 Neben Münzbrettern benutzte der römische Dispensator, der Buchhalter der Patrizier, einen Abakus. Dieser bestand aus einer kleinen Metallplatte, in der sich eine bestimmte Anzahl paralleler Schlitze befand, in denen Knöpfe hin und her gleiten konnten.



keit verfügt, einer Menge ein Zahlwort mit der richtigen Bedeutung zuzuordnen, ist sicher: Dieser Mensch hat Kompetenz zum Zählen. Den Zahlbegriff in allen seinen Facetten begreift er allerdings erst dann, wenn er weiß, dass Zahlen nicht nur Mächtigkeiten, das heißt absolute Größen, angeben, sondern auch einzuordnen sind im Sinne von »ist kleiner als«, »ist größer als«, »ist enthalten in«. Dieses Verständnis, verbunden mit der Fertigkeit, die Zahlwortreihe richtig anzuwenden, gehört zur Kernkompetenz des Zählens. Zahlen lassen sich auch verwenden, um Längen, Gewichte oder Zeitdauern messen zu können (operativer Zahlaspekt).

Zählen ist eine Handlung, die in der koordinativen Zuordnung von Zählzeichen (Zahlworte) und zu zählenden Objekten besteht. Darüber hinaus kann die Anzahl einer Objektkollektion vermehrt, vermindert oder in bestimmte Unterkollektionen aufgeteilt werden. Diese Operationen können stellvertretend mit Hilfe der Zahlworte durchgeführt werden, was in den Grundrechenarten der Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division zum Ausdruck kommt. Zählen und Rechnen mit Zählzeichen wird dabei mit Hilfe von Ziffern realisiert, und damit zeigt sich exemplarisch, dass diese Kompetenz eine semiotische ist, da das Objekt zum Rechenzeichen abstrahiert wird (Semantik). Darüber hinaus müssen Regeln der Zeichenkombination verstanden (Syntax) und diese zu diversen Zwecken angewandt werden können (Pragmatik).

Wie entwickelt sich das Zählen und der Zahlbegriff?

Die quantitative Dimension des Wahrnehmens und Handelns ist die Basis für die Entwicklung des Zählens. Der grundlegende Baustein jeder kognitiven Leistung ist die Unterscheidung von Objekten und Ereignissen sowie die Bildung von perzeptiv-kognitiven Einheiten, die der Wahrnehmung einzelner Objekte und Ereignisse sowie deren Zusammenfassung zu Gruppen zugrunde liegen. Schon Säuglinge können erkennen, ob zwei Objektmengen von gleicher oder unterschiedlicher Anzahl sind. Diese Leistung ist angeboren. Nach den Psychologen Rochel Gelman und Charles R. Gallistel (1978) beruht dieser Entwicklungsgang auf folgenden Prinzipien:

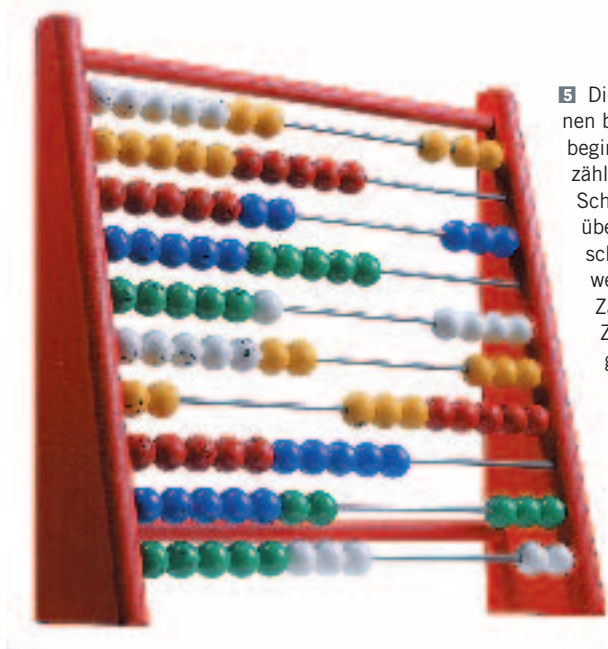
- Das Eindeutigkeitsprinzip: Jedem zu zählenden Gegenstand wird genau ein Zahlwort (allgemeiner: Zählzeichen) zugeordnet.
- Das Prinzip der stabilen Ordnung (ordinaler Zählaspekt): Die Reihe der Zahlenamen (Zählzeichen) hat eine stabile Ordnung.
- Das Kardinalitätsprinzip: Das zuletzt genannte Zahlwort (Zählzeichen) beim Abzählen gibt die Mächtigkeit (Anzahl) einer Menge an.
- Das Abstraktionsprinzip: Die Zählprinzipien 1 bis 3 können auf jede beliebige Menge angewandt werden, das heißt, alles, was vereinzelbar und damit unterscheidbar ist, kann gezählt werden.
- Das Prinzip der Irrelevanz der Anordnung: Für das Zählergebnis ist es gleichgültig, wie die Objekte angeordnet sind.

Säuglinge können beliebige Objektmengen weitgehend unterscheiden, wenn die Differenz einen bestimmten relativen Anteil der Ausgangsmenge überschreitet. Dies ist zwar kein Abzählen im Sinne des Zuordnens von Zählzeichen zu Objekten, entspricht aber doch einer wichtigen Vorläuferfertigkeit numerischer Kompetenzen. In unseren Studien konnten wir zeigen, dass kleine Zahlen bis vier auch bei Säuglingen eine besondere Rolle spielen, da für sie nicht das Relativitätsgesetz der Anzahlunterscheidung (Weber-Fechner Gesetz des perzeptuellen Unterscheidens) zu gelten scheint. So können sie zwei von drei Elementen unterscheiden, aber nicht vier von sechs Elementen, die das gleiche Verhältnis aufweisen. Dies spricht dafür, dass im Falle der Wahrnehmung kleiner Anzahlen ein anderer Mechanismus wirksam ist als im Falle größerer¹¹. Im Alter von zwei bis drei Jahren lernen Kinder, Zahlwörter von Nichtzahlwörtern zu unterscheiden. Im Alter von vier bis sechs Jahren werden diese Zählprinzipien immer bewusster, die Geschwindigkeit des Abzählens nimmt zu, der Zahlenraum wird erweitert (von den ersten drei bis vier Zahlen ausgehend), und die Koordinationsfehler zwischen Zahlwortreihe und zu zählenden Objekten gehen zurück.

Ohne Zählen kein Rechnen

Die meisten Kinder können bereits vor dem Schulbeginn sicher bis zehn zählen, gut die Hälfte der Schulanfänger sogar bis über 20. Die Zahlen haben eine klare Ordnung und definieren die Mächtigkeit einer Objektmenge. Die besondere Abstraktionsleistung besteht darin, dass die Kinder verstehen lernen, dass Zahlen nicht nur Marken für Objekte sind, sondern mehrere Be-

5 Die meisten Kinder können bereits vor dem Schulbeginn sicher bis zehn zählen, gut die Hälfte der Schulanfänger sogar bis über 20. In der Grundschule wird dann die weitere Entwicklung der Zählfertigkeit und des Zahlenverständnisses gezielt gefördert; auch dabei hilft heute noch der Abakus. Dazu gehört neben dem Gebrauch und dem Verständnis von Ziffern als Zählmittel vor allem der operative Umgang mit Zahlen, also das Rechnen.



deutungen haben. Dazu gehören Wörter wie »erster«, »zweiter«, »vorher«, »nachher«, »größer«, »kleiner«, »gleich«. So kann ein Kind Objekte abzählen und verschiedenen Gruppen zuordnen, zum Beispiel eine Dreiergruppe von einer Vierergruppe unterscheiden und diese auch ihrer Mächtigkeit entsprechend anordnen (kardinaler und ordinaler Zahlaspekt). In der Grundschule wird dann die weitere Entwicklung der Zählfertigkeit und des Zahlenverständnisses gezielt gefördert. Dazu gehört neben dem Gebrauch und dem Verständnis von Ziffern als Zählmittel vor allem der operative Umgang mit Zahlen, also das Rechnen. Schon beim Abzählen ist implizit operatives Wissen enthalten: So addieren Kinder, wenn sie Mächtigkeiten beim Zählen um eine Einheit aufaddieren oder – beim Rückwärtszählen – subtrahieren. Das jahrelange Erwerben des operativen und regelgebundenen Zahlengebrauchs mündet schließlich in abstraktere und theoretischere Aspekte des Zahlbegriffs, die aber wesentlich im Zählen wurzeln.

Was ist Dyskalkulie?

Dyskalkulie heißt wörtlich übersetzt Rechenschwäche. Menschen, die an Dyskalkulie leiden, haben Probleme mit dem operativen Umgang mit Zahlen, das heißt den Grundrechenarten, oft aber auch mit dem elementaren Abzählen. Der Begriff Dyskalkulie hat keine klare Bedeutung und sollte daher diagnostisch mit großer Zurückhaltung und nur nach Rücksprache mit Experten verwendet werden. Nach dem internationalen Klassifikationsschema psychischer Störungen gehört die Rechenschwäche zum Bereich der umschriebenen Entwicklungsstörungen schulischer Fertigkeiten. Diese Diagnose darf nur gestellt werden, wenn keine Intelligenzminderung vorliegt, keine Mängel im Mathematikunterricht bestehen und organische sowie neurologische Defizite auszuschließen sind. Bei der Rechenschwäche handelt es sich um ein äußerst vielfältiges und wenig einheitliches Erscheinungsbild, das aber nach Andreas Schulz (1995) auf folgende Bereiche eingeschränkt werden kann, in denen Kinder massive Schwierigkeiten zeigen:

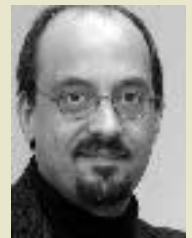
- im Erfassen des Zahlbegriffs und des Zahlenraums
- im Erfassen und Nutzen von Zahlbeziehungen
- im Umgang mit mathematischen Symbolen
- im Anwenden mathematischer Erkenntnisse auf Sachprobleme (Maßzahlaspekt)
- im Erfassen quantitativer Verhältnisse
- im Wahrnehmen, Vorstellen und Darstellen geometrischer Sachverhalte.

Die vermuteten Ursachen reichen von genetischen und neuropsychologischen Ursachen über soziokulturelle und familiäre Gründe bis zu schulischen Ursachen. Darüber hinaus können auch die Eigentümlichkeiten der deutschen Sprache für Zahlwörter mit dafür verantwortlich sein, wenn Kinder Probleme haben, gehörte Zahlwörter in korrekte Schreibziffernfolgen zu übertragen, zum Beispiel Hundertfünfunddreißig in 135. Inzwischen gibt es eine Reihe standardisierter diagnostischer Verfahren, um Dyskalkulie festzustellen. Diese beruhen auf Forschungen, die das Störungsbild nach ihren Kernursachen strukturieren. Zwei Phänomene sind dabei vorherrschend: Schwierigkeiten mit der visuell-räumlichen Wahrnehmung oder Probleme, eine Beziehung zwischen Zählzeichen und Objektmengen herzustellen. Es gibt keine generelle Dyskalkulie-Therapie, aber im Einzelfall haben sich eine ganze Reihe von Maßnahmen bewährt; dazu gehört vor allem die Arbeit mit Zehnerblöcken.

Um festzustellen, welche Vorstellungen oder Handlungsschritte dem Kind Probleme machen, ist es zunächst wichtig, die Rechen- und Zählfehler des Betroffenen genau zu erfassen. Hier haben Mathematikdidaktiker, Kinderpsychiater sowie Entwicklungs- und Kognitionspsychologen wegweisende Ansätze entwickelt. So gibt es inzwischen ein Testverfahren zur Dyskalkulie ^{12/} sowie einen Entwicklungstest zur Zahlbegriffsentwicklung ^{13/}, aber auch Trainingsverfahren ^{14/}. Der Bundesverband Legasthenie und Dyskalkulie e. V. (<http://www.legasthenie.net/start.php>) ist eine gute Anlaufstelle für betroffene Eltern oder Erwachsene mit Rechen- und Zahlenproblemen, um Informationen und Ratschläge zu erhalten ^{15/}. ♦

Der Autor

Privatdozent Dr. Wolfgang Mack, 42, ist seit 1996 wissenschaftlicher Mitarbeiter in der Arbeitseinheit Entwicklungspsychologie (Prof. Dr. Monika Knopf). Er studierte Psychologie an der Universität Würzburg von 1983 bis 1990, arbeitete 1991 bis 1994 am Max-Planck-Institut für Psychologische Forschung und promovierte 1995 an der Ludwig-Maximilians-Universität München. Von 1994 bis 1996 war er an der Universität Potsdam tätig und habilitierte sich 2003 für das Fach Psychologie mit einer Arbeit über die Wahrnehmung kleiner Anzahlen und die Entwicklung des Zahlenverständnisses beim Kleinkind. Für die Habilitationsschrift erhielt er 2003 den Preis der Hermann-Willkomm-Stiftung für die beste Habilitation der mathematisch-naturwissenschaftlichen Fachbereiche.



Literatur:

- | | | | | | | |
|--|--|--|--|---|--|--|
| ^{11/} Mack, W. (2002), Die Wahrnehmung kleiner Anzahlen und die Entwicklung des Zahlenverständnisses beim Kleinkind. Unveröffentlichte Habilitationsschrift. Fachbereich Psychologie und Sportwissenschaften. Johann Wolfgang Goethe-Universität Frankfurt am Main. | ^{12/} Aster, M. v. (2001), Testverfahren zur Dyskalkulie ZAREKI. Frankfurt a. M., Swets & Zeitlinger. | ^{13/} Moog, Wolfgang & Schulz, Andreas (1999), Zahlen begreifen: Diagnose und Förderung bei Kindern mit Rechenschwäche; mit Test- und Trainingsverfahren. Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung. Göttingen, Hogrefe. | ^{14/} Moog, Wolfgang & Schulz, Andreas (1999), Zahlen begreifen: Diagnose und Förderung bei Kindern mit Rechenschwäche; mit Test- und Trainingsverfahren. Osnabrücker Test zur Zahlbegriffsentwicklung. Göttingen, Hogrefe. | ^{15/} Weitere Literaturhinweise beim Bundesverband Legasthenie und Dyskalkulie e. V. (http://www.legasthenie.net/start.php) | ^{16/} Dehaene, Stanislas (1999), Der Zahlensinn oder Warum wir rechnen können. Basel, Birkhäuser. | ^{17/} Ifrah, Georges (1989), Universalgeschichte der Zahlen. Frankfurt am Main, Campus Verlag. |
| ^{18/} Van Luit, J.E.H., Van de Rijt, B.A.M., & Hase-mann, K. (2001), | | | | | | ^{18/} Krajewski, Kristin (2003), Vorhersage von Rechenschwäche in der Grundschule. Hamburg, Verlag Dr. Kovač. |